# NOM=Selem Elmokhtar Aoufa

## NO=1092 classe=7C1

**Exercice 7**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$$

$$z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$$

Solution:

* $z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

Soit $\boxed{\alpha=z_0}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ La solution reelle de l'équation:

Alors $\alpha^3-(6+3i)\alpha^2+(21+19i)\alpha-26(1+i)=0$

$\alpha^3-6\alpha^2-3i\alpha^2+21\alpha+19i\alpha-26-26i=0$

$\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26+i(-3\alpha^2+19\alpha-26)=0$

• on résout le système:

$\begin{cases} \alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26=0 \; \textbf{(1)}, \text{ D'aprés } \textbf{(2)} \text{ on trouve } \boxed{\alpha_1=2}, \boxed{\alpha_2=\frac{13}{3}} \\ -3\alpha^2+19\alpha-26=0 \; \textbf{(2)}, \text{ En remplaçant dans } \textbf{(1)} \text{ on trouve que} \end{cases}$

$\boxed{\alpha_1=2}$ verifie **(1)** et $\boxed{\alpha_2=\frac{13}{3}}$ ne vérifie pas **(1)** Alors $\boxed{z_0=2}$

• on pose $p(z)=(z^3)-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)$

$p(z)=(z-z_0)(z^2+az+b)=(z-2)(z^2+az+b)$

on determiner les reelles $(a, b)$

on factorise par $(z-2)$

TH

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-6-3i$ | $21+19i$ | $-26-26i$ |
| 2 | | 2 | $-8-6i$ | $26+26i$ |
| | 1 | $-4-3i$ | $13+13i$ | 0 |
| | z | a | b | (1) |

Alors $p(z)=(z-2)(z^2+(4-3i)z+13+13i$

• Resolvons l'equation $p(z)=0$

$p(z)=(z-2)(z^2+(4-3i)z+13+13i=0$

$\Rightarrow (z-2)=0$ ou $z^2+(4-3i)z+13+13i=0$

$\begin{cases} \boxed{Z=2} \\ Z^2-(4+3i)Z+13+13i=0 \\ \Delta=(4+3i)^2-52-52i=-45-28i \end{cases}$

par le calcul on obtient une racine $\boxed{\delta=2-7i}$

Les solutions de l'equation du second degré:

$Z_1=\dfrac{4+3i+2-7i}{2}=3-2i$, $\boxed{Z_1=3-2i}$, $Z_2=\dfrac{4+3i-2+7i}{2}=1+5i$

$\boxed{Z_2=1+5i}$

Donc l'ensemble des solutions: $\{2,\ 3-2i,\ 1+5i\}$

* $Z^3-(11+2i)Z^2+2(17+7i)Z-42=0$

(E) admet une solution réelle $\beta\in\mathbb{R}$, on résout le systéme

$\beta^3-(11+2i)\beta^2+2(17+7i)\beta-42=0$, D'aprés (2) on trouve $\beta_1=0$, $\beta_2=7$

$\begin{cases} \beta^3-11\beta^2+34\beta-42=0 \ (1) \\ -2\beta^2+14\alpha=0 \ (2) \end{cases}$

En remplaçant dans (1) on trouve que $\boxed{\beta_2=7}$ verifée et $\boxed{\alpha_1=0}$ ne verifie pas (1) alors $\boxed{Z_0=7}$

$Z^3-(11+2i)Z^2+2(17+7i)Z-42=0$

- on pose $p(Z)=(Z^3)-(11+2i)Z^2+2(17+7i)Z-42=(Z-7)(Z^2+aZ+b)$

$p(z)=(Z-Z_0)(Z^2+aZ+b)=(Z-7)(Z^2+aZ+b)$

- on utilise la methode de l'indentification.

$(Z-7)(Z^2+aZ+b)=Z^3+aZ^2+bZ-7Z^2-7aZ-7b=Z^3+Z^2(a-7)+Z(b-7a)-7b$

$\begin{cases} a-7=-11-2i \Rightarrow \boxed{a=-4-2i} \\ b-7a=2(17+7i) \\ -7b=-42 \Rightarrow \boxed{b=6} \end{cases}$

$\Rightarrow p(Z)=(Z-7)(Z^2-(4+2i)Z+6)$

$\Rightarrow p(Z)=(Z-7)(Z^2-(4+2i)Z+6)=0$

$\Rightarrow p(Z)=0 \Rightarrow (Z-7)(Z^2-(4+2i)Z+6)=0$

$p(Z)=0 \Rightarrow (Z-7)=0$ ou $(Z^2-(4+2i)Z+6)=0$

$\begin{cases} Z=7 \\ Z^2-(4+2i)Z+6=0 \\ \Delta=(4+2i)^2-4(6)\times1=12+16i-24 \\ \Delta=-12+16i \end{cases}$

, par le calcul on obtient une racine $\delta=2+4i$

Donc $\boxed{\sqrt{\Delta}=2+4i}$

2

Donc Les solutions de l'equation du second dégre:

$\boxed{z_1 = \frac{4+2i+2+4i}{2} = 3+3i}$, $\boxed{z_2 = \frac{4+2i-2-4i}{2} = 1-i}$

Donc Les solutions de (E): $\{7, 3+3i, 1-i\}$

3

# NOM=Selem Elmokhtar Aoufa

## NO=1092 classe=7C1

**Exercice 3**

**Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants:**

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ 3) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ 5) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

**Solution :**

| | Relation complexe | Nature du triangle ABC | Justification |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | Le triangle ABC est equilateral | Car $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ |
| 2 | $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ | Le triangle ABC est rectangle isocile en B | car le rapport $= i$ et $\boxed{\lvert i \rvert = 1}$ |
| 3 | $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | Le triangle ABC est equilateral. | Car $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| 4 | $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ | Le triangle ABC est rectangle en C, | car le rapport est imaginaire pur |
| 5 | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | Le triangle ABC est isocile en A, | car $\boxed{\left\lvert \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rvert = 1}$ |

# NOM=Selem Elmokhtar Aoufa

## NO=1092 classe=7C1

**Exercice 13** **Bac 2013**

On considère l'équation (E) : $25x-9y=5$ , où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u+9v=1$. En déduire une solution particulière $(x_0, y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où $(x,y)$ est une solution particulière de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Quelles sont les solutions $(x,y)$ de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?

c) Peut-on trouver un couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tel que $(x^2, y^2)$ soit solution de (E) ?

Justifier votre réponse.

**Solution :**

1) (E) : $25x-9y=5$ , a) on utilise l'algorithme d'Euclide pour determiner deux entiers relatifs u, v / $25u+9v=1$

on note $a=25$ , $b=9$, $\boxed{au+bv=1}$

$25=9\times 2+7 \Rightarrow \boxed{a-2b=7}$

$9=7\times 1+2 \Rightarrow \boxed{b-(a-2b)=2} \Rightarrow \boxed{2=(3b-a)}$

$7=2\times 3+1 \Rightarrow \boxed{(a-2b)-3(3b-a)=1} \Rightarrow \boxed{1=4a-11b}$

Donc $\boxed{u=4}$, $\boxed{v=-11}$, on peut deduire une solution particulière $(x_0, y_0)$ de (E) a partir de (E') : $25u+9v=1$

Donc, $25\times 4\times(5)-9\times(11)\times 5=5$ , $25\times 20-9(55)=5$

alors la solution particulière est $(x_0=20,\ y_0=55)$.

b) l'ensemble des solution de (E).

$$(-)\begin{cases} 25x-9y=5 \\ 25\times(20)-9(55)=5 \end{cases}$$

$25(x-20)-9(y-55)=0 \Rightarrow 25(x-20)=9(y-55)$, on a : $25\wedge 9=1$

D'après La T de Gauss, $25 \mid 9(y-55) \Rightarrow 25 \mid (y-55) \Rightarrow y-55=25k$

$\Rightarrow \boxed{y=55+25k}$ ; $9 \mid 25(x-20) \Rightarrow 9 \mid (x-20) \Rightarrow x-20=9k \Rightarrow \boxed{x=20+9k}$

1

Donc $S_{(E)}\{20+9k, 55+25k\}$, on vérifie la réciproque : $25(20+9k)-9(55+25k)=500+225k-495-225k=5$ on trouve $S\{20+9k, 55+25k\}$

2) $\boxed{d=(x\wedge y)}$ a) (E) admet des solutions Donc $(x\wedge y)|5 \Rightarrow d|5 \Rightarrow d\in\{1,2\}$.

b) $x$ et $y$ sont premiers entre eux $\Rightarrow \boxed{(x\wedge y)=1} \Rightarrow \boxed{d=1}$

Comme $5|y$ on doit avoir $5\nmid x$, $(9\wedge 5)=1$ / $x=20+9k$ avec $K\neq 5p$. Les solutions sont $\{20+9k / K\neq 5p, 55+25k$

c) Si $(x^2,y^2)$ est solution de l'équation(E) :

$25x^2-9y^2=5 \Rightarrow (5x-3y)(5x+3y)=5$

$\begin{cases}5x-3y=5\\5x+3y=1\end{cases}$ $\boxed{10x=6}$ rejete. ; $\begin{cases}5x-3y=1\\5x+3y=5\end{cases}$ $\boxed{10x=6}$ rejete ; $\begin{cases}5x-3y=-1\\5x+3y=-5\end{cases}$ $\boxed{10x=-6}$ rejete

$\begin{cases}5x-3y=-5\\5x+3y=-1\end{cases}$ $\boxed{10x=-6}$ rejete

Donc il y a pas un couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tel que $(x^2,y^2)$ soit solution de (E).